

QUELLES MODALITÉS POUR CONSTRUIRE UN RITUEL DE NUMÉRATION EFFICACE AU CYCLE 2 ?

Anne DIVISIA

PEMF, IREM de Grenoble

Anne.Divisia@ac-grenoble.fr

Géraldine MASTROT

PEMF, IREM de Grenoble

Geraldine.Mastrot@ac-grenoble.fr

Hélène STOFFEL

PEMF, IREM de Grenoble

Helene.Stoffel@ac-grenoble.fr

Marie-Caroline CROSET

Formatrice ESPE, IREM de Grenoble

marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé

Le travail que nous présentons a pour point de départ nos visites et observations en tant que formatrices d'enseignants. Nous avons constaté la présence fréquente d'un rituel de numération pour dénombrer les jours d'école souvent appelé : "Chaque jour compte".

Ce rituel est mis en œuvre selon des modalités très variables. Nous les avons confrontées à des éclairages théoriques issus de la didactique des mathématiques et des sciences cognitives : les principes d'un rituel efficace (Eustache & Guillery-Girard, 2016), l'articulation entre manipulation et abstraction (Bruner, 1973), les contraintes inhérentes au matériel pour qu'il soit source d'apprentissage (Laski, 2015), la prise en compte de l'aspect décimal de la numération (Tempier, 2010) et la place des représentations (du dessin vers l'écriture chiffrée) (Dehaene, 1992). En parallèle de ces analyses, nous avons mis en place une expérimentation dans deux classes (CP et CP-CE1) afin d'explorer les principes clés que ce rituel doit prendre en compte pour devenir un véritable dispositif didactique d'enseignement de la numération.

Cette communication propose d'identifier à l'attention des enseignants et des formateurs les modalités du rituel les plus bénéfiques en termes d'apprentissage.

Depuis janvier 2015, nous sommes membres d'un groupe IREM "primaire" de Grenoble composé de formatrices (formatrice ESPE en mathématiques, conseillères pédagogiques, PEMF exerçant dans différents cycles). La réflexion de ce groupe de travail porte sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 2, dont la maîtrise conditionne l'apprentissage et la compréhension d'autres champs mathématiques tels que le calcul ou les mesures de grandeur. En tant que formatrices, nous avons remarqué la présence fréquente d'un rituel consistant à dénombrer les jours d'école, rituel souvent appelé : "*chaque jour compte*".

Ce dispositif, qui se réduit souvent à atteindre le centième jour d'école, nous semble avoir un potentiel plus large et pourrait répondre à de vrais objectifs d'apprentissage en ce qui concerne la numération décimale.

Dans une première partie, nous décrivons brièvement le rituel "*chaque jour compte*" à partir de nos observations de classe. Cette description nous amène à nous questionner sur l'efficacité de ce dispositif quant à la prise en charge de la compréhension de la numération décimale de position. En nous appuyant sur quelques éclairages théoriques, nous proposons une évolution de ce rituel que nous décrivons et associons à l'analyse de quelques productions d'élèves. Enfin, nous concluons en listant les limites et points forts de notre dispositif.

I - POINTS DE DÉPART

4 Un rituel souvent observé : "chaque jour compte"

Au fil de nos visites et observations de classes, en tant que formatrices d'enseignants, nous rencontrons un rituel mathématique fréquemment utilisé, désigné par : "chaque jour compte".

D'origine nord-américaine, le "Number of the day" est largement repris par les sites d'enseignants (par exemple, <http://www.charivarialecole.fr/archives/1101> ou <http://boutdegomme.fr/rituels-maths-chaque-jour-compte-a109143610161>). Ce rituel consiste à compter les jours d'école jusqu'au centième jour. Chaque jour, un élève responsable ajoute une paille qui représente un jour d'école dans un « gobelet des unités » (cf. photo 1). Lorsque ce gobelet contient dix pailles, il les regroupe à l'aide d'un élastique et les place dans le « gobelet des dizaines », c'est la phase de groupement. Il procède de façon identique pour les centaines (dix paquets de dix pailles passent dans le « gobelet des centaines » (cf. photo 2)). Après avoir manipulé les pailles, il remplit un tableau de numération collectif (cf. photo 2). Dans certaines classes, les autres élèves complètent, en parallèle, une fiche préremplie avec différentes représentations du nombre : écriture chiffrée, représentations analogiques, écriture en lettres, décompositions additives... (cf. photos 3).



Photo 1 - Les pailles
(source : www.sanleane.fr)



Photo 2 - Les pailles et le tableau de numération collectif (source : <http://damedubois.eklablog.com>)

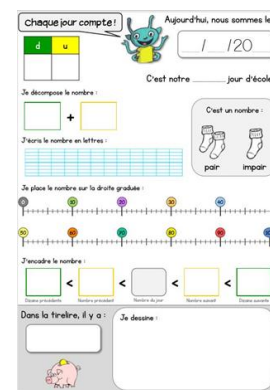


Photo 3 - les représentations du nombre
(source : www.lutinbazar.fr)

Parmi les pratiques souvent observées, certaines variantes nous ont interpellées :

- Un élève responsable procède seul au rituel, sans mutualisation, ni temps collectif avec le reste de la classe.
- Le rituel se pratique sans matériel (absence de pailles ou autres éléments représentant les jours d'école - cf. photo 4) ou avec un matériel très varié (pailles de même couleur - cf. photo 1), de couleurs différentes au sein d'un même rang de numération (cf. photo 2) ou de couleurs différentes selon la position (une paille blanche vaut « un » tandis qu'une paille noire vaut « dix » - cf. photo 5).
- Le rituel se centre sur le remplissage du tableau de numération qui arrive dès le premier jour de classe avec la terminologie classique dizaine (d) unités (u) (cf. photo 6)
- Le groupement par « dix » est induit dès le dixième jour qui se situe mi-septembre (cf. photo 6)
- Des fiches de représentations du nombre préremplies sont proposées à l'ensemble de la classe. Elles sont complexes en début d'année et n'évoluent pas. Une jeune collègue de CE1 témoigne en février : "Mes élèves commencent à y arriver...".
- Le matériel du rituel n'est pas utilisé dans les apprentissages relatifs à la numération.
- Le rituel prend fin le centième jour d'école : les enseignants ne se permettant pas de le dépasser croyant alors être hors programmes.

¹⁶⁰ Sites consultés le 23 / 09 / 2018.

¹⁶¹ Sites consultés le 23 / 09 / 2018.



Photo 4 - L'absence de matériel

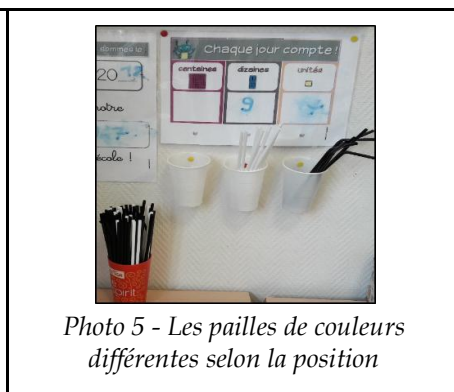


Photo 5 - Les pailles de couleurs différentes selon la position

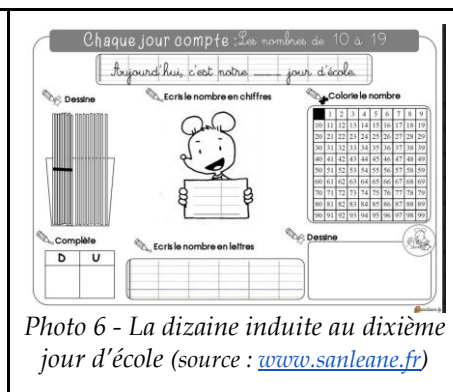


Photo 6 - La dizaine induite au dixième jour d'école (source : www.sanleane.fr)

5 Comment la numération décimale de position est-elle prise en charge par le rituel "chaque jour compte" ?

Les différents aspects décrits plus haut nous amènent à nous interroger sur ce rituel :

- La tâche prescrite est identique chaque jour. Il n'y a pas de progressivité des apprentissages. N'y a-t-il pas un phénomène de lassitude qui s'installe avec une perte de sens ? Peut-on parler de rituel quand il y a absence de progressivité ? **Ce rituel est-il porteur d'apprentissages mathématiques ?**
- Du matériel très différent est proposé selon les classes : quel sens est donné au matériel par rapport au nombre qu'il désigne ? **Quel sens fait-on porter au matériel utilisé ?**
- Différentes représentations du nombre sont imposées et ne sont pas toujours en relation avec le matériel utilisé : **Comment l'élève fait-il le lien entre le nombre et ses représentations ?**
- Le tableau de numération est au centre de l'activité. L'aspect positionnel de la numération (écrite, chiffrée) est donc prépondérant au détriment de l'aspect décimal. **Est-ce suffisant pour donner du sens à la numération ? Quel sens l'élève donne-t-il à ce tableau ?**
- La dizaine s'impose dès le dixième jour. Comment la pertinence du groupement par dix peut-elle être mise en évidence ? Les relations entre les unités de numération sont-elles prises en compte ? Autrement dit : **L'aspect décimal de la numération est-il travaillé ?**

Pour répondre à ces questions, nous proposons un détour par la théorie puis nous présentons le rituel que nous avons expérimenté dans deux classes (CP et CP-CE1).

II - ÉCLAIRAGES THÉORIQUES

Afin d'apporter des éléments de réponse à notre questionnement, dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur quelques éclairages théoriques que nous déclinons en trois axes. Dans un premier temps nous abordons les **apprentissages mathématiques en jeu dans la numération décimale**, nous poursuivons ensuite avec les **différentes représentations du nombre** avant de nous intéresser à la place de **rituels** dans l'apprentissage.

1 Du côté de la didactique des mathématiques et des concepts de la numération

1.1 Les deux aspects de la numération

Tempier (2010) rappelle les deux aspects de notre système de numération, à savoir :

- L'aspect positionnel : chaque position indique une unité de numération. La position réfère à une unité : par exemple, dans « 5159 », le « 5 » peut représenter « 5 milliers » quand il est en quatrième position (en partant de la droite), ou « 5 dizaines » s'il se situe en deuxième position (en partant de la droite).
- L'aspect décimal : ce qui importe est la relation entre les unités. Ainsi, deux unités consécutives ont un rapport de dix. Dix unités, c'est une dizaine ; dix dizaines, c'est une centaine...

1.2 Les difficultés liées à l'apprentissage de la numération

Dans leur article de 1984, Bednarz et Janvier mettent en évidence de nombreuses difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération. Leurs expérimentations soulignent notamment les difficultés :

- à voir les groupements et leur rôle dans l'écriture conventionnelle, en dépit d'une place importante du travail sur cette écriture ;
- à voir la pertinence de ces groupements ;
- à opérer avec ces groupements : à les faire et les défaire ;
- à interpréter les procédures de calcul en termes de groupements : le sens des techniques opératoires est éludé.

Cette étude ancienne pourrait nous laisser penser que les difficultés ont été prises en charge dans l'enseignement. Or ce que nous montre Tempier, dans ses récentes recherches (2010, 2016), c'est qu'il n'en est rien. Sur son site de ressources¹⁶², pour les enseignants, trois types de difficultés sont illustrées :

- Les difficultés concernant l'aspect positionnel de la numération : recomposer un nombre, par exemple lorsque les unités ne sont pas données dans l'ordre, ou lorsqu'un zéro doit marquer une position.
- Les difficultés concernant l'aspect décimal de la numération : recomposer un nombre avec plus de dix unités à certains ordres (par exemple, utiliser le fait que 21 dizaines correspondent à 210 unités) ou effectuer des conversions entre les unités de numération avec une difficulté renforcée lorsque la relation se situe entre deux unités non successives (par exemple, convertir trois centaines en unités).
- Les difficultés concernant l'utilisation de la numération pour résoudre des problèmes. Un exemple est donné dans le contexte de la monnaie et on pourrait l'étendre à d'autres problèmes de la forme : *combien faut-il de carnets de 10 timbres pour envoyer 563 lettres ?* La lecture du nombre n'est en général pas exploitée pour répondre à la question. Les enseignants considèrent d'ailleurs souvent que ce type de problème relève davantage de la division.

Ces auteurs nous alertent sur les difficultés des élèves, en ce qui concerne l'acquisition de la numération, notamment chez des élèves de CE2, c'est-à-dire autour de 8 ans.

Si l'on se réfère au rituel "*chaque jour compte*", évoqué en première partie, la dizaine imposée bien souvent le dixième jour, ne permet pas de travailler la nécessité du groupement et donc la construction de l'aspect décimal de la numération au CP.

1.3 La place du tableau de numération

Nous avons vu, lors de la présentation de « *chaque jour compte* », que le tableau de numération était prégnant dès les premiers jours de CP, associé avec la terminologie classique : *centaines, dizaines et unités*.

Lors des activités de remplissage du tableau de numération, il peut arriver que l'élève remplisse de façon « mécanique » le tableau. Ses réponses correctes n'attestent pas nécessairement de sa compréhension réelle : les termes de dizaines et unités semblent vides de sens et il restitue simplement le « *texte du savoir* » comme le dénonce Brissiaud, en parlant du verbalisme des figurations :

Le verbalisme est la restitution du « texte du savoir » sans réelle compréhension de ce savoir. Dans le domaine de la numération décimale, il existe deux formes de verbalisme qui correspondent aux deux grands types de représentations des nombres : chiffrées et figurées. Ces deux formes de verbalisme résultent d'une conception statique des représentations utilisées ; l'enfant peut alors fournir des réponses apparemment correctes, qui n'attestent pourtant pas de la compréhension réelle d'équivalences entre procédures de dénombrement.
(Brissiaud, 2005)

Une des pistes pour éviter le verbalisme des figurations (Brissiaud, 2005) est que l'élève groupe lui-même les dix objets pour construire « le paquet de dix » : la dizaine serait alors perçue comme la représentation spatiale du résultat d'une action. L'écriture chiffrée « 126 », par exemple, associée à une quantité organisée en « une centaine, deux dizaines et six unités » prend du sens et répond à une

¹⁶² numerationdecimale.free.fr

procédure de dénombrement. Elle n'est pas l'aboutissement d'un simple automatisme qui consisterait à concaténer mécaniquement les trois chiffres.

Tempier (2010) dénonce la même dérive : « *Les mots unités, dizaines, centaines, ... ne sont souvent utilisés que comme des étiquettes pour dire le nom des rangs dans l'écriture du nombre* ». L'accent est ainsi mis sur l'aspect positionnel dans l'écriture du nombre sans mise en relation avec son aspect décimal.

1.4 Comment éviter ces difficultés ?

Chambris (2012) déplore que le travail sur les unités de numération se limite aux tableaux de numération et à quelques décompositions réglées dont '*chiffre des...*' et '*nombre de...*' sans enseigner les relations entre unités du type "1 millier = 10 centaines". Elle précise que la seule unité présente dans l'enseignement de la numération semble être le "nombre 1". Dans sa volonté de faire évoluer l'enseignement de la numération, elle propose de travailler les relations entre unités de numération tant dans l'apprentissage de la numération que dans celui du système métrique.

De son côté, Tempier (2016), conseille, pour éviter de ramener l'élève à un apprentissage de techniques telles que le comptage en unités simples, la multiplication par 10 ou l'utilisation d'un tableau de numération sans mise en lien avec les savoirs de la numération : *il est nécessaire de faire des relations entre unités un enjeu fort d'enseignement.*

Nous montrons, dans la suite de notre présentation, comment nous tentons de prendre en compte ces recommandations de la recherche pour palier les difficultés évoquées.

2 Du côté des représentations

Tentons de recueillir quelques repères théoriques sur les représentations du nombre pour revenir notamment à notre questionnement sur les représentations proposées des élèves : **Comment l'élève fait-il le lien entre le nombre et ses représentations ?**

Il est possible d'interroger ces représentations avec différents prismes. Toutefois, nous faisons le choix de nous intéresser à ce que nous disent Dehaene et Bruner dont les cadres semblent parfaitement correspondre à ce que nous voulons souligner.

2.1 Le triple code de Dehaene et Cohen

On sait, et le travail de la conférence de consensus *Nombres et calculs au primaire* (2015) nous l'a rappelé, que l'apprentissage des nombres est favorisé par la diversité des représentations qui sont proposées aux élèves : dessins, schémas, désignations orales, désignations écrites, résultats de petits calculs, etc.

Dehaene & Cohen (1995) proposent un modèle avec trois grands systèmes de représentation mentale des nombres : le code analogique des quantités numériques, le code visuel arabe et le code verbal.

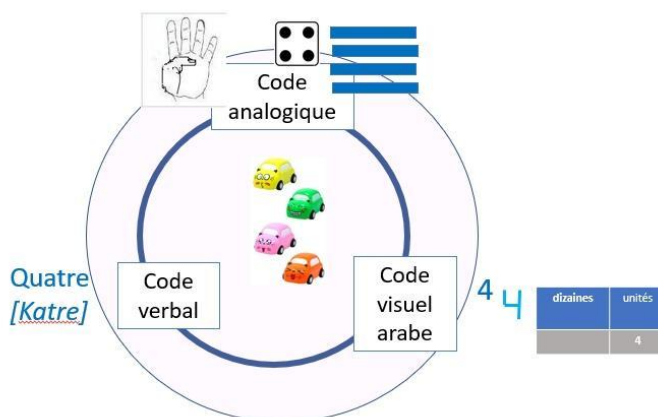


Figure 1 - Le triple code de Dehaene et Cohen (1995)

Le code analogique désigne la quantité physique. Ce système inné, sous-tendu par le lobe pariétal, permet d'appréhender le sens du nombre, autrement dit la signification des quantités. Ce système non symbolique permet donc une évaluation précise des petites quantités et une estimation approximative des grandes collections. Il sert à effectuer des comparaisons numériques et des calculs approximatifs.

Le code visuel correspond à la forme visuelle des nombres arabes. Cet aspect symbolique, intervient dans les activités de calcul précis et permet de réaliser des calculs mentaux complexes.

Le code verbal est la représentation auditive verbale (ex. "quatre" prononcé /katr/) utilisée principalement dans l'activité de comptage. Elle permet de coder la quantité et intervient dans les activités de calcul précis.

Pour travailler la numération, il est donc nécessaire d'aborder ces différents codes mais également le passage de l'un à l'autre dans des activités qui donnent du sens au nombre.

2.2 Les trois modes de Bruner

Le cadre de Dehaene & Cohen, s'il est pertinent avec l'approche des différentes représentations, ne prend pas en compte l'aspect manipulation, d'où l'intérêt d'aller regarder ce que propose Bruner (1973) qui précise que le savoir peut se représenter selon trois modes :

- **Le mode énonciatif**, où on apprend par l'action, par la **manipulation**.
- **Le mode iconique**, où il s'agit "de pouvoir représenter quelque chose sans l'avoir sous les yeux. L'action est transformée en image mentale".
- **Le mode symbolique**, qui propose une représentation abstraite : "Le système symbolique représente les choses par des symboles qui sont déconnectés et arbitraires." La représentation visuelle arabe, ou écriture chiffrée, d'un nombre en fait partie.

Sous cet éclairage, nous pouvons revenir au rituel : "*chaque jour compte*", lors duquel les élèves ne manipulent pas ou peu et pour lequel on pourrait déduire qu'il n'y a pas, par ce biais, de travail sur l'image mentale du nombre et sa représentation.

2.3 Les caractéristiques d'un matériel

Sur l'aspect matériel, Laski (2015) reprend des éléments identifiés dans une méta-analyse de Carbonneau et al. (2013). Ils listent les différentes caractéristiques d'une manipulation efficace pour conduire l'élève vers l'abstraction d'un concept mathématique :

- **Un matériel de référence utilisé comme support d'apprentissage sur une période de temps conséquente.**
- **Un matériel épuré qui se distingue des objets du quotidien.**
- Les objets familiers risquent de distraire les élèves, et ainsi, de rendre plus difficile le lien entre la manipulation et le concept mathématique. Les perles dorées Montessori sont citées comme un exemple de matériel épuré.
- **Un matériel "transparent" qui permet une représentation concrète du concept mathématique.** La mise en mémoire et la création d'images mentales sont facilitées par la ressemblance physique avec la propriété visée et le respect des relations de proportionnalité entre les différents éléments (taille, poids...).
- Lorsqu'un **autre matériel** (boîtes de Picbille, abaquas, bouliers...) est proposé en relation avec le précédent, il faut expliciter en quoi ce nouveau matériel reprend la même notion mathématique.

3 Du côté de la ritualisation

Nous nous sommes d'abord intéressées aux recommandations des neuropsychologues Eustache et Guillery-Girard (2016) qui s'appuient sur les connaissances récentes des processus mnésiques. Nous avons retenu les suivantes :

- multiplier les modalités de présentation du nombre,
- donner des stratégies d'organisation (type carte mentale),
- utiliser des rituels qui améliorent la réceptivité des élèves.

Mais en quoi la ritualisation est-elle une méthode optimale pour mémoriser ? Là encore, Eustache et Guillery-Girard (2016), dans leur ouvrage de neurosciences, nous éclairent : la répétition des épisodes d'apprentissage soutient la formation de nouvelles connaissances pour compenser le faible empan de mémoire de travail de l'enfant. Elle favorise la mémorisation à long terme et permet d'effacer

progressivement les souvenirs spécifiques pour ne conserver que le concept. Enfin, par son caractère fractionné, le rituel permet de mobiliser les capacités d'attention réduites chez l'enfant.

Nous nous sommes ensuite intéressées à l'usage du rituel dans le cadre scolaire. Celui-ci est souvent rencontré notamment à l'école maternelle (appel, calendrier, dénombrement des élèves présents...). En sciences de l'éducation, Amigues et Zerbato-Poudou (2000) définissent un rituel par des caractéristiques précises :

- la grande régularité de l'activité qui se déroule à la même heure, dans le même lieu et avec la même durée.
- la **répétitivité** des gestes et des paroles qui lui donne **une identité formelle**.
- les **contraintes** avec des règles claires et respectées par tous. Tout n'est pas permis, il y a des règles pour s'exprimer et pour écouter.

De plus, le rituel a un caractère multifonctionnel. Sans chercher à faire une liste exhaustive de ses fonctions, nous avons retenu les suivantes :

- **la fonction de passage** entre la famille et la sphère scolaire : comme une activité de démarrage, un lanceur de la journée scolaire.
- **la fonction de socialisation** : il permet à l'enfant de prendre conscience de son appartenance à un groupe avec lequel il partage une culture. Tout le monde doit faire la même chose en même temps : des comportements collectifs sont construits.
- **la fonction langagière** : l'élève doit produire un message adapté à la situation.
- **la fonction d'acquisition d'autonomie** qui grâce à la répétition développe la confiance en soi.
- **une fonction d'anticipation** : Le rituel permet à l'enfant de se projeter dans un futur plus ou moins proche.

Les recherches plus récentes en sciences de l'éducation (Merri, 2015) confirment le fait qu'un rituel donne une sécurité affective et intellectuelle propice à la construction des savoirs.

Nous nous sommes ensuite penchées sur l'usage qui peut être fait d'un rituel en mathématiques. Dias (2015), dans son ouvrage *"Nous sommes tous des mathématiciens"*, identifie le rituel comme une clé, un "type de médiation" qui ouvre sur des environnements d'apprentissage. Pour lui, ritualiser permet de stabiliser des connaissances mathématiques par l'acquisition d'automatismes et favorise le développement de nouvelles connaissances. Il cite deux rituels de numération : le nombre du jour et la boîte à cailloux qui permet la construction progressive d'un système d'organisation des nombres.

III - ÉLÉMENTS DE RÉPONSES : "LES CRAYONS"

Dans cette troisième partie, nous présentons une expérimentation menée dans deux classes du bassin grenoblois en CP. S'il s'inspire du *"chaque jour compte"* décrit plus haut, le rituel *"les crayons"*, que nous avons construit, apporte de nombreuses modifications et des choix explicites pour répondre aux préconisations issues de la recherche. C'est un rituel sur lequel nous continuons à nous interroger.

1 La présentation du rituel "Les crayons"

Chaque jour, le rituel *"les crayons"* se déroule en plusieurs phases. Tout d'abord, un élève responsable pose un nouveau crayon au tableau (cf. photo 7), dénombre la collection avec la classe et annonce : *"Il y a x crayons au tableau, nous sommes le x^{ème} jour d'école"*. Cette première phase orale se conclut par une formulation qui associe les aspects cardinal et ordinal du nombre.

Puis, dans un deuxième temps, tous les élèves écrivent sur l'ardoise le nombre énoncé *"de toutes les manières qu'ils connaissent"*. Toutes les représentations sont acceptées (analogiques, verbales, visuelles, symboliques... cf. photo 8). Enfin, un troisième temps est proposé pour conclure le rituel. Il peut prendre différentes formes parmi lesquelles on peut citer la construction d'une carte mentale collective, un retour sur une ou plusieurs productions d'élèves intéressantes et suscitant un débat, ou encore avec la représentation du nombre par les doigts des élèves... (cf. photos 9 et 10).



Photo 7 - Phase orale du rituel

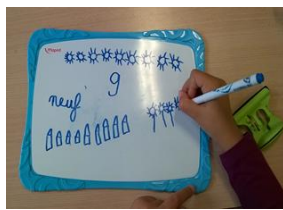
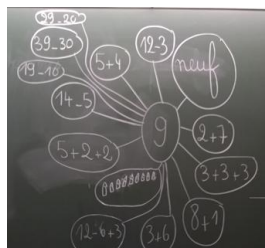


Photo 8 - Phase écrite du rituel



Photos 9 et 10 - Conclusions du rituel

En parallèle, dans le cadre de l'enseignement du temps, un calendrier est complété avec les crayons pour représenter l'aspect ordinal du nombre (cf. photo 11).



Photo 11 - Les crayons dans le calendrier

Au bout d'une quarantaine de jours de classe, la routine s'installe. Le dénombrement des crayons devient fastidieux et source d'erreurs. Pour remobiliser les élèves, des rebondissements apparaissent qui permettent d'introduire le groupement.

Premier rebondissement : l'enseignant guide les élèves vers le groupement des crayons : par deux, par cinq, par dix. Ces propositions se font en parallèle du travail de la classe en calcul mental. Chaque proposition est testée et à chaque fois le tableau se réorganise (cf. photos 12, 13 et 14). Et finalement, le groupement par dix l'emporte par l'expérimentation de la classe et le guidage de l'enseignant.

Nouveau rebondissement : une fois le groupement par dix bien installé, le tableau est un jour malencontreusement mélangé par des lutins ou la dame de ménage.... Il faut tout remettre en place et la trousse, symbole de la dizaine est introduite en échange de dix crayons comme outil facilitant le dénombrement (cf. photo 15). Les échanges s'opèrent, la numération décimale est en marche. Plus tard, le cartable apparaîtra, représentant la centaine.



Photo 12 - Groupements par deux

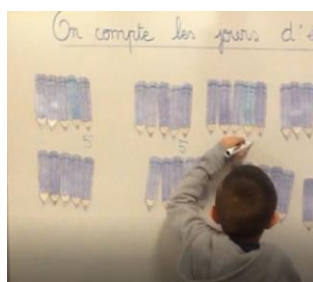


Photo 13 - Groupements par cinq

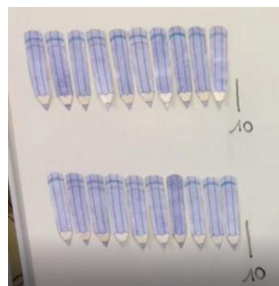


Photo 14 - Groupements par dix

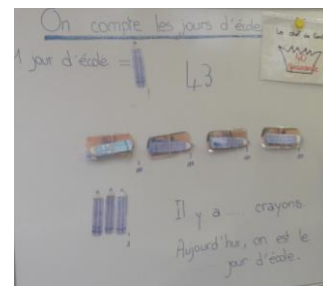


Photo 15 - Introduction de la trousse

2 Une année de numération avec les crayons

Pour se donner quelques repères sur l'année, la trousse est introduite en novembre et le cartable en février/mars. À partir de ces grands jalons, une programmation s'est construite, dont voici les principaux éléments :

- La période 1 et le début de période 2 sont consacrés à dénombrer les crayons de un en un, de deux en deux, de cinq en cinq, de dix en dix (du premier jour d'école aux environs du quarante-sixième jour d'école) et à aborder la schématisation des crayons.

- La période 2 se poursuit avec l'introduction de la trousse (la dizaine), la poursuite du dénombrement de dix en dix, et la schématisation de ce nouvel élément qu'est la trousse. Les crayons et trousse sont utilisés dans le passage au calcul (en manipulation).
- En période 3 se situe l'introduction du cartable (la centaine) ainsi que l'addition en ligne avec l'apparition d'une nouvelle dizaine.
- En périodes 4 et 5, c'est au tour de l'addition posée en colonne et des nombreuses conversions (cf. paragraphe 3.4, Les relations entre les unités de numération).

Cette programmation est détaillée dans un tableau (cf. Annexe 1) où des activités de numération complémentaires (*fourmillions*, jeu du *banquier*...) sont proposées en parallèle.

De manière régulière, tout au long de l'année, la décomposition des nombres est travaillée prenant appui sur les nombres « 10 », « 50 », « 100 », les doubles, les presque doubles, les compléments à dix. Les conversions d'un nombre de trousse et d'un nombre plus grand que dix de crayons sont privilégiées. Par exemple, « 3 trousse et 15 crayons » font combien de crayons ? Le sens des différentes opérations (addition, soustraction, multiplication, division) est abordé au fur et à mesure des propositions des élèves.

Le cœur du rituel est la **prise en charge de la numération décimale avec les groupements**.

La variable "nombre d'unités de chaque ordre" permet de mettre en jeu les relations entre unités quand il y a plus de dix unités à certains ordres. Elle est déterminante pour permettre de développer une compréhension de la numération qui ne se limite pas à la connaissance de la valeur des chiffres en fonction de leur position mais prend en compte différentes interprétations des unités (une centaine comme dix dizaines ou cent unités) Tempier (2016)

Nous distinguons différents types de décomposition. Il y a, d'une part, la décomposition dite canonique (par exemple, « 3c 5d 7u » pour « 357 ») ou encore des décompositions « groupées » en unités de numération (par exemple, « 35d 7u » pour « 357 » ou « 3c 57u » pour « 357 »). Ces décompositions ne nécessitent pas une compréhension décimale de la numération au sens où les élèves peuvent convertir ces décompositions en « 357u » en positionnant les étiquettes c, d et u correctement sans mobiliser les relations décimales entre les unités. Nous avançons l'idée que, ce sont les décompositions dont la concaténation des quantités d'unités de numération ne permet pas, à elle seule, d'aboutir à la bonne réponse ; par exemple, « 3c 4d 17u » pour « 357 » qui permettront de travailler les relations entre unités de numération. Nous les nommerons dorénavant *décompositions semi-groupées*. Ce sont ces décompositions qui offrent la possibilité de détecter les « experts apparents » qui donnent à croire à l'enseignant qu'ils ont une maîtrise de la numération alors qu'ils n'ont que déplacé les étiquettes au bon endroit.

À l'aide des crayons :

- Un travail spécifique sur les **conversions d'unités** est pratiqué (Chambris (2012)).
- La **technique opératoire de l'addition** est justifiée.
- Les **besoins des élèves** sont pris en compte, en effet :
 - Les représentations ne sont pas imposées.
 - Des incontournables sont identifiés : + 1 ; + 10, doubles, décompositions en « 10 + ... » ; en « 20 + ... » ; en « 50 + ... ».
 - Un temps de recherche suffisant est accordé à chacun.
 - Des outils spécifiques viennent renforcer l'entraînement et construire les apprentissages : manipulation des crayons, liste d'incontournables comme points d'appuis pour les plus fragiles...
 - Le matériel est utilisé comme matériel de référence pour toutes les activités de numération de la classe.
 - Les différentes représentations sont travaillées : code analogique, code verbal, code arabe (Dehaene) ainsi que les passages d'un code à l'autre.
 - Différentes décompositions du code arabe sont construites : sous la forme canonique, groupées ou semi-groupées nécessitant des conversions entre unités de numération.

En mai, O. réalise une carte mentale comportant six représentations du nombre (écriture chiffrée, écriture littérale, schéma des trousse et crayons, décomposition additive, tableau de numération, abaque) qui sont toutes correctes. Elle décompose le nombre dans un tableau de numération en précisant le vocabulaire centaine, dizaine, unité.

Lors des évaluations du mois de juin, O. connaît la comptine numérique jusqu'à 199, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 et dénombrer une collection de 37 cubes, en les comptant de un en un.

3.2 Les productions d'une élève en difficulté

L'élève S. est une élève allophone dont le milieu familial est très éloigné de la culture scolaire. Elle a un déficit au niveau des acquis langagiers, des manques importants de vocabulaire et elle est en difficulté de manière générale sur la compréhension des consignes orales. Son taux de réussite aux évaluations de rentrée est de 30,8 %. En septembre, elle connaît la comptine numérique jusqu'à 28, sait lire et écrire les nombres jusqu'à 9 avec une confusion entre 6 et 9 et réussit à dénombrer une collection de 17 cubes.

Voici ses productions aux trois moments de l'année :

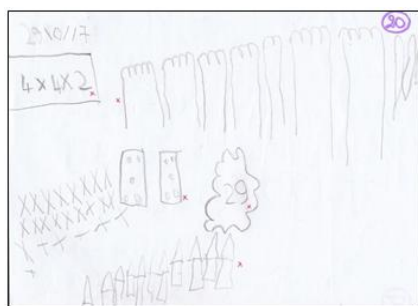


Photo 19 - Représentation du nombre 20 par l'élève S. en septembre

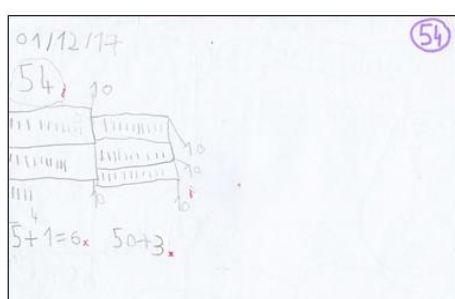


Photo 20 - Représentation du nombre 54 par l'élève S. en décembre

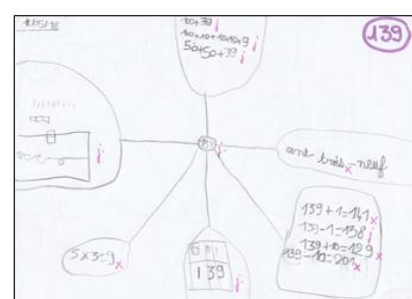


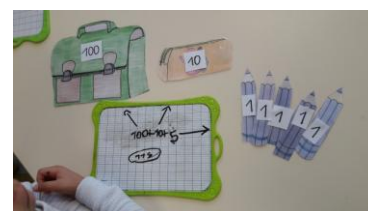
Photo 21 - Représentation du nombre 139 par l'élève S. en mai

En septembre, l'élève S. produit une écriture chiffrée erronée (29 pour 20) et ne fait pas le lien entre le nombre et la quantité d'éléments des collections qu'il représente (11 crayons, 24 croix, 10 points, 27 doigts).

En décembre, son écriture chiffrée du nombre est correcte (54) et elle fait le lien entre le nombre et la quantité qu'il représente. Sa représentation analogique est constituée de 54 traits qui symbolisent les crayons groupés en 5 trousse et 4 crayons isolés. Elle ne sait pas encore y associer des écritures mathématiques correctes ($5 + 1$, $50 + 3$)

En mai, elle réalise une carte mentale de six représentations du nombre partiellement correctes. Le lien entre numération orale et numération écrite est en cours d'acquisition (elle écrit cent-trois-neuf pour cent-trente-neuf). Elle produit beaucoup plus de décompositions mathématiques qu'en décembre (huit contre deux avec une moitié de productions correctes).

Modalités de différenciation (cf. photos 22 à 24) : l'élève S. a travaillé, une grande partie de l'année, à proximité du tableau de référence, avec du matériel à disposition et l'étayage de l'enseignante. La composition du groupe d'élèves l'accompagnant (de trois à cinq) a évolué avec l'analyse régulière des productions des carnets des jours d'école.



Photos 22 à 24 - modalités de différenciation

Lors des évaluations du mois de juin, l'élève S. connaît la comptine numérique jusqu'à 69. Elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 avec des confusions sur 60 / 70, 80 / 90 et réussit à dénombrer une collection de 37 cubes, en les comptant de un en un.

3.3 Les productions d'une élève performante en mathématiques

L'élève N. est une élève performante dans l'ensemble des domaines scolaires. Elle est parfaitement lectrice lors de son entrée au CP. Son taux de réussite en mathématiques aux évaluations de rentrée est de 96 %.

En septembre, elle connaît la comptine numérique jusqu'à 78, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 20 et sait dénombrer une collection de 37 cubes par comptage de un en un.

Voici ses productions aux trois moments de l'année :

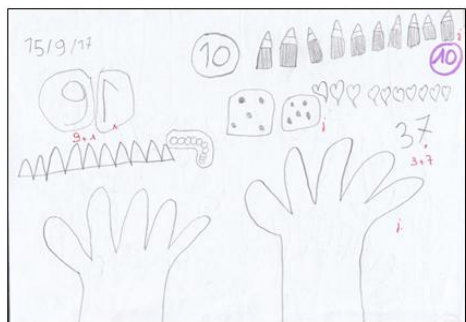


Photo 25 - Représentation du nombre 10 par l'élève N. en septembre

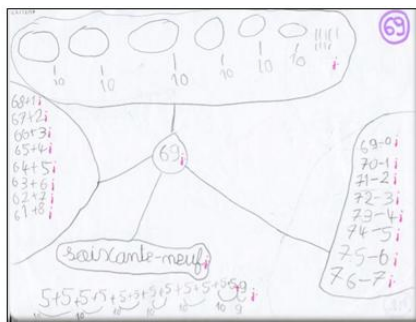


Photo 26 - Représentation du nombre 69
par l'élève N. en décembre

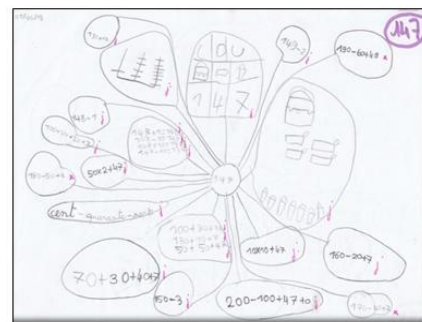


Photo 27- Représentation du
nombre 147 par l'élève N. en mai

En septembre, l'élève N. produit une écriture chiffrée correcte. Elle représente le nombre principalement de manière analogique (mains, dés, collection de crayons et autres éléments). Elle connaît les décompositions du nombre 10 (9 et 1 ; 3 et 7) mais n'a pas encore acquis l'écriture mathématique du signe +.

En décembre, elle schématise les troupes en utilisant l'écriture chiffrée (10). Elle produit majoritairement des décompositions mathématiques additives ($68 + 1$, $67 + 2$, $66 + 3$, $65 + 4...$) et soustractives ($69 - 0$, $70 - 1$, $71 - 2$, $7 - 63...$). Elle agit de manière mécanique en appliquant ses propres algorithmes (elle enlève un au premier terme de la somme et ajoute un au second...). Toutes ses productions sont correctes.

En mai, elle réalise une carte mentale très dense de 19 représentations du nombre. Sa production s'est enrichie d'écritures multiplicatives et mixtes ($50 \times 2 + 47$; $10 \times 10 + 47$; $70 + 30 + 40 + 7$; $130 + 10 + 7$; $200 - 100 + 47 + 0 \dots$). Elle prend appui sur les nombres 50, 100 et leurs décompositions ($70 + 30$; $50 + 50$).

L'élève N. se positionne en élève chercheur, qui prend des risques dans sa quête de nouvelles écritures du nombre. Ce qui la conduit aussi à produire des écritures erronées ($190 - 60 + 49$; $170 - 40 + 7$; $180 - 50 + 7$).

Lors des évaluations du mois de juin, l'élève N connaît la comptine numérique au-delà de 200, elle sait lire et écrire les nombres jusqu'à 100 et elle sait dénombrer des collections de 37 éléments en utilisant le groupement (par deux ou par dix).

Pour chaque élève présenté, nous constatons une progression dans les apprentissages mathématiques : connaissance de la comptine, lecture des nombres, dénombrement d'une collection d'objets. Leur connaissance des nombres s'agrandit, leurs décompositions s'enrichissent chacune à leur niveau, à leur rythme. Les autres élèves de la classe s'inscrivent dans l'un ou l'autre de ces profils. Actuellement, notre groupe IREM s'attache à réaliser un travail d'analyse plus détaillé sur les indicateurs de progrès de l'ensemble de la classe.

3.4 Les relations entre les unités de numération

Comme nous l'avons décrit précédemment dans la présentation du rituel "les crayons", l'élève responsable du rituel annonce chaque jour, après avoir posé un nouveau crayon et après avoir animé le dénombrement de la collection par la classe : "*Aujourd'hui, il y a ... crayons, nous sommes le .. ème jour d'école*".

Plus le nombre de crayons augmente dans l'année et plus les possibilités de décliner la première proposition s'étoffent grâce aux groupements par dix. Par exemple, au 147^e jour d'école, la première partie de la phrase s'est déclinée ainsi : "Aujourd'hui il y a 147 crayons, on peut aussi dire qu'il y a 1 cartable 4 trousse et 7 crayons ou encore 14 trousse et 7 crayons". Une autre élève a complété la phrase "On peut aussi dire 1 centaine 4 dizaines et 7 unités ou 14 dizaines et 7 unités ou 147 unités".

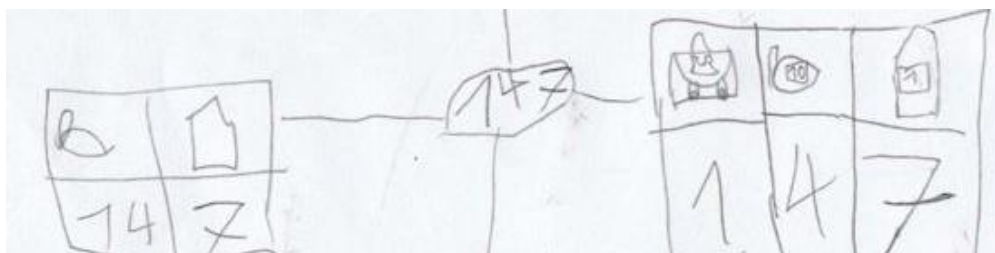


Photo 28 - Différentes représentations du nombre 147

Les relations entre cartable, trousse et crayons sont travaillées dans un premier temps à l'oral. Puis, les élèves transcrivent ensuite à leur manière ces conversions sur l'ardoise et dans leur carnet (cf. photo 28). Leurs productions servent ensuite de points d'appui à l'explicitation régulière des relations entre les crayons, les trousse et le cartable. La consigne de l'enseignant peut aussi conduire l'ensemble de la classe à travailler spécifiquement ces relations comme en témoigne celle du 166^e jour d'école "Aujourd'hui vous allez représenter le matériel sans le cartable" (cf. photos 29, 30 et 31).



Photos 29, 30 et 31 - Différentes représentations du nombre 166

Cette démarche s'accompagne progressivement de l'introduction du vocabulaire mathématique centaine / dizaine / unité et de l'usage des abréviations associées c / d / u. Les nombreux aller retours avec les désignations de cartable / trousse / crayon contribuent à l'explicitation de ces termes. Notre objectif de fin d'année est que les élèves délaissent le vocabulaire spécifique "cartable / trousse / crayon" au profit du vocabulaire mathématique décontextualisé.

IV - EN GUISE DE CONCLUSION

1 Limites et pistes d'amélioration

Pour clore notre propos, nous évoquons quelques limites à notre rituel "les crayons" ainsi que certaines pistes d'amélioration.

- En premier lieu, nous identifions la nécessité de renforcer le lien entre les aspects ordinal et cardinal du nombre même si, à la suite de Mounier (2016), nous pouvons dire que "La comptine numérique, qui permet de compter un par un, est particulièrement adaptée à la perception du nombre dans son aspect ordinal. Il est également possible de compter par paquets en énonçant par exemple 2, 4, 6... ou 10, 20, 30..."
- Une deuxième piste d'amélioration répondrait aux recommandations de Laski (2015) en ce qui concerne le matériel : l'absence de sobriété peut détourner l'attention de l'élève de l'apprentissage de la notion visée (la trousse est un matériel de la vie quotidienne qui pourrait être davantage épuré) et le rapport de dix n'est pas conservé entre ce qui représente l'unité, la dizaine et la centaine (la trousse devrait être dix fois plus grande que les crayons).
- Enfin, ce matériel constitué de trousse et de crayons, qui se veut être un matériel de référence, se prête difficilement à la technique opératoire de la soustraction (le matériel des cubes proposé par Tempier est

beaucoup plus adapté et l'auteur propose de nombreuses pistes (voir site¹⁶³). Il conviendrait donc de faire des liens entre ce matériel et celui des crayons pour travailler la technique opératoire de la soustraction.

2 Points forts

Au-delà de l'aspect matériel et de ses défauts, la proposition de mise en œuvre, pour éviter les écueils du rituel classique du chaque jour compte, nous paraît répondre aux éléments théoriques relevés. Voici en conclusion une synthèse des points forts de notre proposition :

- Le rituel "les crayons" permet de mettre l'accent sur l'aspect décimal de la numération décimale en s'appuyant sur la manipulation. Les notions de dizaine, de centaine ainsi que les relations entre les unités de numération sont construites progressivement avec les élèves et se placent au cœur des activités proposées. La notion de groupement apparaît à l'élève comme une procédure nécessaire pour dénombrer et non comme une réponse à une injonction de l'enseignant.
- Les conversions et les décompositions canoniques ou semi-groupées sont régulièrement travaillées assurant une compréhension de la numération.
- Les différentes représentations du nombre sont travaillées. On retrouve les modes de représentation décrits par Dehaene et Bruner : le mode symbolique englobant le code verbal et arabe, le mode énonciatif (manipulation des crayons) et iconique (schémas des crayons) précisant le code analogique.
- De par les nombres proposés, l'usage du matériel et de la manipulation, les représentations ouvertes, ce rituel évolue et s'adapte au rythme d'apprentissage de chaque élève ainsi que nous l'avons vu dans la présentation des progrès de trois élèves aux profils très différents. Tous peuvent être au travail sur une tâche collective qui ne se distingue pas par le nombre travaillé mais par le nombre ou le type de représentation demandé. Des représentations incontournables sont identifiées sécurisant l'élève fragile tandis qu'un espace de liberté permet à l'élève de devenir chercheur s'il le souhaite.

Des traces écrites (cartes mentales collectives et carnet des jours d'école) accompagnent la structuration des connaissances. Par l'analyse des représentations proposées, l'enseignant peut enrichir les procédures des élèves et affiner son enseignement (différenciation).

Au fil de l'année, les nombres en jeu "grandissent" : on démarre avec de petits nombres, on compte de un en un, puis de dix en dix. On joue avec ces nombres selon des consignes qui évoluent. Chaque carte mentale est source d'apprentissage et d'assise des connaissances. Les élèves s'emparent des représentations des autres, ils capitalisent la connaissance apportée par le groupe et mise en avant par l'enseignant.

Enfin, nous ne pouvons pas conclure sans mentionner le fait que ce rituel développe un goût partagé pour les mathématiques, le plaisir de chercher dans un cadre sécurisant car réitéré tous les jours... et qu'il contribue à faire aimer les nombres !

V - BIBLIOGRAPHIE

Amigues, R., Zerbato-Poudou, M.-T. (2000). *Comment l'enfant devient élève. Les apprentissages à l'école maternelle*, Retz.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, n° 33, pp. 5-31.

Brissiaud, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation orthophonique*, n° 223. pp. 225-237.

Bruner, J. S. (1973). *The relevance of education*, New York: Norton.

¹⁶³ numerationdecimale.free.fr

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, n° 105(2), p. 380.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N*, n° 89, pp. 39-69.

CNESCO, (2015). Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire. Dossier de synthèse. <http://www.cnesco.fr/fr/numeration>.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, n° 44, pp. 1-42.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, n° 1, pp. 83-120.

Dias, T. (2015). *Nous sommes tous des mathématiciens*, Magnard.

Eustache, F., Guillery-Girard, B. (2016). *La neuroéducation - la mémoire au cœur des apprentissages*, Odile Jacob.

Laski, E. et al. (2015) What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science, *Sage Open*, n° 5(2).

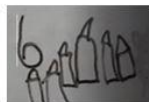
Merri, M. (2015). Pour un renouveau des usages et des définitions des rituels à l'école, *Recherche en éducation, hors-série n° 8*.

Mounier, E. (2016). École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération orale. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 36/3*, pp. 347-396.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, n° 86, pp. 59-90.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, n° 98, pp. 67-90.

VI - ANNEXE 1 : PROGRAMMATION SUR UNE ANNÉE SCOLAIRE DU RITUEL DES CRAYONS

SEPTEMBRE							OCTOBRE							NOVEMBRE			DECEMBRE			
Nombre de semaines		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14					
Nombre de jours d'école		J5	J10	J15	J20	J25	J30	J35	J40	J45	J50	J55	J60	J65	J70					
J1 : Introduction du 1 ^{er} crayon	↔	J6 Début carte mentale		↖ Début écriture en mots		↗ Début dénombrement de 10 en 10, intro. marqueurs de 10		Vacances												
	Dénombrement de 1 en 1			↔ Dénombrement de 1 en 1, 2 en 2, 5 en 5, recherches pour schématiser les crayons et anticiper le résultat (1)																
Activités complémentaires		Lucky Lucke : décomposition des 10 premiers nombres		Introduction des doigts de Stella Baruk		Grelé Grelé : addition de petits nombres		Grelé Grelé : compléments à 10		Vacances										