2002

Rallye mathématiques

Épreuve officielle

Solutions

Exercice n° 1 : (5 points)

Un Bug dans la boîte

<u>Calcul du trajet AG</u>

En utilisant le développement du patron de la boite, c'est la ligne droite AG que doit emprunter l'insecte.

$GI = \frac{1}{3}$ (hauteur du triangle équilatéral) $= \frac{1}{3}\left(6\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$GJ = 10 + \sqrt{3}$

donc $AG^2 = AJ^2 + JG^2 = 9 + (10+\sqrt{3})^2 = 112 + 20\sqrt{3}$

d'où $AG = \sqrt{112+20\sqrt{3}} \approx 12{,}11$ cm

<u>Calcul du trajet AH</u>

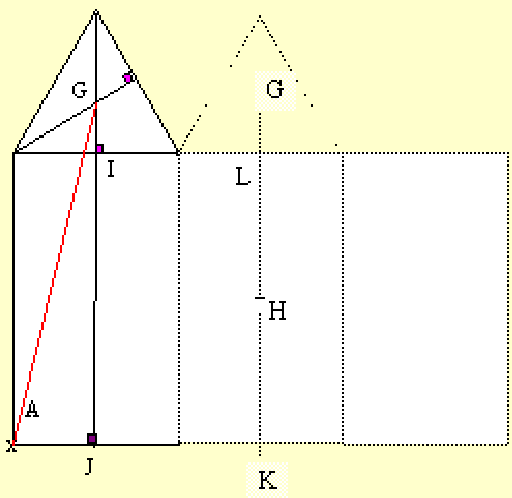
$AH^2 = AK^2 + KH^2 = 81 + 25 = 106$ d'où $AH = \sqrt{106} \approx 10{,}30$

<u>Calcul du trajet GH</u>

$GH = HL + LG = 5 + \sqrt{3} \approx 6{,}73$

Pour comparer les deux trajets, il suffit de comparer les trajets AG et AH (le trajet GH étant commun).

<u>Le trajet AHG est donc le plus court.</u>



Exercice n°2 : (5 points)

Arithmétique consécutive

Pour a = 4, b = 5, c = 6 et d = 7, p = 4 + 25 + 216 = 245 = 5 X 49 = 7 X 35

donc $a + b^2 + c^3$ est divisible par b =5, d = 7 et d^2 = 49.

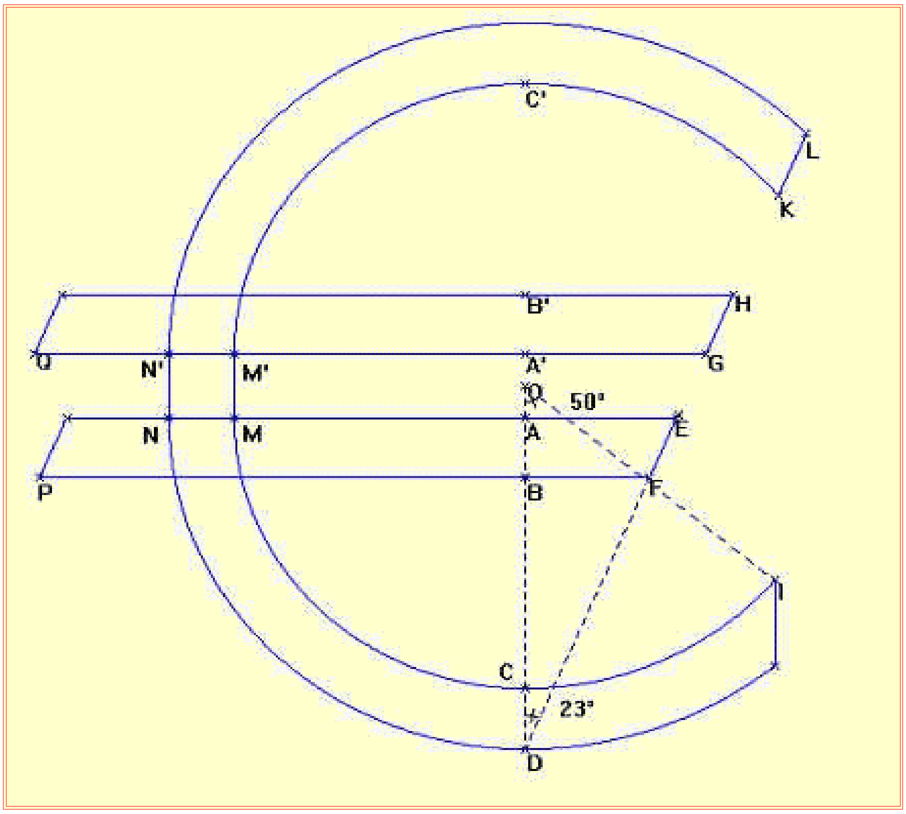
Dans le cas général, a = d –3, b = d –2 et c = d –1 donc

$P = d - 3 + (d-2)^2 + (d-1)^3 = d - 3 + d^2 - 4d + 4 + d^3 - 3d^2 + 3d - 1 = d\,(d^2 - 2d) = d^2(d-2) = d^2 \times b$

$a + b^2 + c^3$ <u>est bien divisible par</u> b, d et d^2.

Exercice n° 3 : (8 points)

Chère union



Calcul exact de BF (en cm): BF = BD x tan (Odx) = 4,5 x tan 23° = 1,9

Si les points O, F et I étaient alignés, on aurait : BF = OB x tan (DOI) = 1,5 x tan 50° = 1,8

Donc ces points ne sont pas alignés.

Exercice n° 4 : (5 points)

Cours ça m' dit !

Si lundi, Philippe : 3 jours consécutifs

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si mardi, Claude et Philippe : 3 jours consécutifs

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si mercredi, Claude : 3 jours consécutifs

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si jeudi, Philippe : 3 jours consécutifs

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si vendredi, Claude et Philippe : 3 jours consécutifs

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si samedi, Claude : 3 jours consécutifs

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si le jour de reprise est un dimanche,

	Claude	Gérard	Philippe
lundi			
mardi			
mercredi			
jeudi			
vendredi			
samedi			
dimanche			

Si le jour de reprise est dimanche,
pour ne pas courir trois jours de suite, Claude doit se reposer jeudi et Philippe vendredi.
Gérard peut se reposer vendredi ou samedi, mais samedi ne convient pas car pas de possibilité d'entraînement commun.

Conclusion : La reprise se situe le dimanche avec le planning hebdomadaire ci-dessus ; alors les trois athlètes courent ensemble le samedi.

Exercice n° 5 : (12 points)

Un travail Pharaonique

Calcul de B_1I

Dans le triangle AHE rectangle en H, calculons la hauteur de la pyramide :

D'après Pythagore, $EH^2 = EA^2 - AH^2 = 220^2 - \frac{230^2}{2}$ d'où $EH \approx 148$ m .

En appliquant Thalès dans le triangle EBH, on a $\frac{BB1}{BE} = \frac{BI}{BH} = \frac{B1I}{EH}$, or, $\frac{BB1}{BE} = \frac{1}{5}$ donc $B'I \approx 29{,}6$ m.

Calcul de AI

$\frac{BI}{BH} = \frac{1}{5}$ or $BH = \frac{230\sqrt{2}}{2}$ donc $BI = \frac{1}{5} \times \frac{230\sqrt{2}}{2}$ donc $HI = \frac{230\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{230\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{230\sqrt{2}}{2}$.

D'après Pythagore appliqué au triangle AHI rectangle en H, $AI^2 = AH^2 + HI^2 = \left(\frac{230}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{16}{25} + 1\right)$ $AI \approx 208{,}3$ m.

La pente de la droite (AB') est de $\frac{29{,}6}{208{,}3}$ soit d'à peu près 14,2 %.

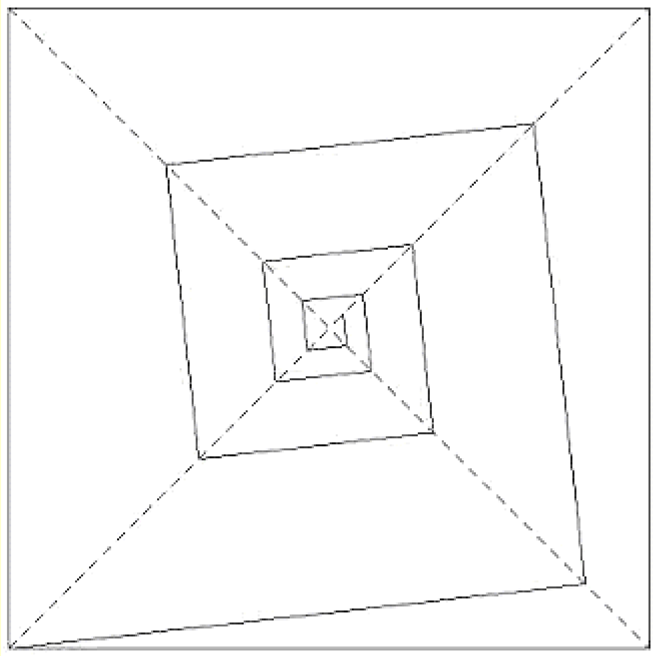
Si on superpose la face EBC de la pyramide sur la face EAB, le point B_1 vient en A_1, le point C_1 vient en B_1 et le point C_2 vient en B_2 ($B_1C_2 = A_1B_2$ et $C_2C_1 = B_2B_1$) comme ci-dessous :

Les droites (AB_1) et (A_1B_2) sont parallèles (donc elles ont la même pente) ; on peut donc appliquer Thalès :

$\frac{B_2B_1}{EB_1} = \frac{AA_1}{EA} = \frac{1}{5}$, or $EB_1 = \frac{4}{5} EB$ donc $B_2B_1 = \frac{4}{25} EB \approx 35{,}2$ m. $C_2C_1 = 35{,}2$ m .

$\frac{EB_2}{EB_1} = \frac{EA_1}{EA} = \frac{4}{5}$ donc $EB_2 = \frac{4}{5} EB_1$ donc $EB_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 EB = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times 220$

On peut continuer ainsi à construire les points B_3, B_4 …sur l'arête [EB] avec $EB_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times 220$. Avec la calculatrice, on trouve que EB_n est inférieur à 10 à partir de n=14.



Exercice n° 6 : (5 points)

Petit écart

a) 2 3 4 5

Pour que la différence soit la plus petite possible, il faut déjà prendre deux nombres de deux chiffres ; il faut ensuite que la différence entre leurs chiffres des dizaines soit la plus petite possible (c'est-à-dire 1 : on a le choix entre 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5) ,que le chiffre des unités du plus grand soit le plus petit possible et que le chiffre des unités du plus petit soit le plus grand possible, ce qui conduit à 42 et 35.

b) 2 3 4 5 6 7 Avec le même raisonnement, on trouve : 523 et 476.	c) 2 3 4 5 6 7 8 9 Avec le même raisonnement, on trouve : 6234 et 5987.

Exercice n° 7 : (5 points)

Quel cric !

Cric replié : BD = 40 cm et AC = 0 cm.	En position intermédiaire, c'est-à-dire à 28 tours de vis : BD = 40 - 28 × 0,2 = 34,4 cm ; AC = $2\sqrt{20^2-17{,}2^2} \approx 20{,}4$ cm.	En position haute, c'est-à-dire à 10cm de hauteur de plus : AC ≈ 20,4 +10 ≈ 30,4 cm ; BD ≈ $2\sqrt{20^2-15{,}2^2} \approx 26$ cm BD a diminué de 34,4 - 26 = 8,4 cm soit 84 mm.

Exercice n° 8 : (5 points)

2002 L'odyssée...

1°) a) 33 (en Octowokien) → 3 x 8 + 3 = 27 (en terrien)

b) 33 = 4 x 8 + 1 donc 33 → 41 (en Octowokien).

2°) a) 333 (en Octowokien) → 3 x 8^2 +3 x 8 + 3 = 219 (en terrien)

b) 333 = 5 x 8^2 + 1(8) + 5 donc 333 → 515 (en Octowokien)

3°) 2002 → 2 x 8^3 + 2 = 1026 âmes

4°) 2002 = 3 x 8^3 + 7 x 8^2 + 2x8 + 2 → 3722 (en Octowokien).

5°) 51 x 22 = 2002 → (5 Base +1)(2 Base +2) = 2 Base^3 + 2

soit 10 Base^2 + 12 Base = 2 Base^3 ou 5 Base + 6 = Base^2

donc Base(Base – 5) = 6 seule solution : Base = 6.

Les autochtones voisins ont 3 doigts au bout de leurs deux mains.